

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

Οδηγίες: Από το σχολικό βιβλίο (1^ο τεύχος) να μελετήσετε τη θεωρία και τις ασκήσεις σελ. 20-36. Ακολουθούν ενδεικτικές επαναληπτικές ασκήσεις. Δοκιμάστε να τις λύσετε αφού μελετήσετε ξανά τη θεωρία του κεφαλαίου.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$1) (x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ = x^2 - 6x + 9$$

$$2) (2x+w)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot w + w^2 \\ = 4x^2 + 4xw + w^2$$

$$3) (5x+3w) \cdot (3w-5x) = \\ (3w)^2 - (5x)^2 = \\ 9w^2 - 25x^2$$

$$4) (2\psi-5)^3 = (2\psi)^3 - 3 \cdot (2\psi)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2\psi \cdot 5^2 - 5^3 \\ = 8\psi^3 - 3 \cdot 4\psi^2 \cdot 5 + 6\psi \cdot 25 - 125 \\ = 8\psi^3 - 60\psi^2 + 150\psi - 125$$

$$5) (-5x^3-2\psi)^2 = \\ = (-5x^3)^2 - 2 \cdot (-5x^3) \cdot 2\psi + (2\psi)^2 \\ = 25x^6 + 20x^3\psi + 4\psi^2$$

$$6) \left(\frac{a}{3} + 3\beta^2\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot 3\beta^2 + (3\beta^2)^2 \\ = \frac{a^2}{9} + 2a\beta^2 + 9\beta^4$$

$$7) (7+\sqrt{2})(7-\sqrt{2}) = \\ 7^2 - \sqrt{2}^2 = \\ 49 - 2 = 47$$

$$8) (\beta^4+1)(\beta^2+1)(\beta+1)(\beta-1) = \\ (\beta^4+1)(\beta^2+1)(\beta^2-1) = \\ (\beta^4+1)(\beta^4-1) = \beta^8-1$$

2. Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $x=-2$

$$(2x+1)^3 - 2x(3x+1) \cdot (3x-1) - (3x-2)^2 = \\ (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 - 2x(9x^2-1) - [(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2] = \\ 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1 + 1 - 18x^3 + 2x - (9x^2 - 12x + 4) = \\ 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 18x^3 + 2x - 9x^2 + 12x - 4 = \\ = -10x^3 + 3x^2 + 20x - 3$$

$$\text{Για } x=-2 \Rightarrow -10(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 20 \cdot (-2) - 3 = \\ -10 \cdot (-8) + 3 \cdot 4 - 40 - 3 = \\ 80 + 12 - 40 - 3 = 49$$

3. Αν $x = \frac{1}{\psi}$, να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του x και ψ :

$$A = (5x - \psi)^2 - (5x - 3)(5x + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$$

$$A = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot \psi + \psi^2 - (25x^2 - 9) + 4\psi - (\psi^2 + 2 \cdot \psi \cdot 2 + 2^2)$$

$$A = \cancel{25x^2} - 10x\psi + \cancel{\psi^2} - \cancel{25x^2} + 9 + \underline{4\psi} - \cancel{\psi^2} - \underline{4\psi} - 4$$

$$A = -10x\psi + 5$$

$$x = \frac{1}{\psi} \Rightarrow A = -10 \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \psi + 5 = -10 + 5 = -5$$

σταθερή, ανεξάρτητη του x και ψ .

4. Αν $2x + \phi = -5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (2x - \phi)^2 + 7x\phi - x(2 - \phi) + 2x$$

$$A = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \phi + \phi^2 + 7x\phi - 2x + x\phi + 2x$$

$$A = \underline{4x^2} - \underline{4x\phi} + \phi^2 + \underline{7x\phi} - \cancel{2x} + \underline{x\phi} + \cancel{2x}$$

$$A = 4x^2 + 4x\phi + \phi^2$$

$$A = (2x + \phi)^2 = (-5)^2 = 25$$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$$

$$\begin{aligned} A' \text{ μέγος} &= (3\alpha)^2 + 2 \cdot 3\alpha \cdot 2\beta + (2\beta)^2 - 5(\alpha^2 - 4\beta^2) - 24\alpha\beta - 15\beta^2 \\ &= \underline{9\alpha^2} + \underline{12\alpha\beta} + \underline{4\beta^2} - \underline{5\alpha^2} + \underline{20\beta^2} - \underline{24\alpha\beta} - \underline{15\beta^2} \\ &= 4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' \text{ μέγος} &= (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 \\ &= 4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2 \end{aligned}$$

2

$$A' \text{ μέγος} = B' \text{ μέγος}$$